

CONCOURS BLANC ÉPREUVE I CORRECTION

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

BARÈME ET EXIGENCES

1. a. 1,5 points, 0,5 par ligne à compléter.
b. 1 points, 0,5 en moins à chaque erreur.
2. a. 1,5 points, 0,5 par ligne à compléter.
b. 1 points, 0,5 pour comprendre que le programme fait un calcul de moyenne empirique, 0,5 pour expliquer que la moyenne empirique est une approximation de l'espérance.
c. 1 point, on demande un encadrement précis de l'espérance en fonction du nombre de cartes, et pas seulement un comportement grossier du genre "l'espérance est croissance en fonction du nombre de cartes".
3. 0,5, question de cours.
4. 1,5 points, 0,5 pour une analyse du support de Δ_i , 0,5 pour le télescopage et pour l'expression de T_i comme somme, et 0,5 pour conclure sur le support de T_i .
5. 0,5 point, c'est très classique.
6. 1,5 points, 1 pour l'expression de l'événement puis de sa probabilité (il est indispensable de citer l'indépendance des X_i), puis 0,5 pour reconnaître la loi usuelle (géométrique).
7. a. (i) 1 point, question difficile, surtout à cause des indices des X_i à utiliser pour décrire l'événement.
(ii) 1,5 point, 1 pour la formule des probas totales en citant le bon SCE, 0,5 pour finir le calcul.
(iii) 1 point pour donner la loi avec le bon paramètre (0 si le paramètre n'est pas donné ou n'est pas bon).
b. 1 point, question de cours.
8. a. 0,5 point, une explication suffit.
b. 1 point, à condition de citer le bon SCE comme toujours.
c. 1 point, question assez technique, attention à bien tenir compte du fait que la somme commence à $k = 1$.
d. 1 point, on finit le calcul après utilisation de la formule des probas totales.
9. a.
b. 1 point pour chacune de ces questions. La question est mal posée, le point est donné facilement.
10. a. 0,5 point, c'est plus ou moins du cours et de toute façon, le résultat est rappelé en introduction.
b. (i)
(ii) 0,5 point pour chaque question, je ne sais pas à quel point une justification longue est attendue.
11. 1 point, encore une mauvaise question à mon avis (la dernière!), je ne sais pas si les exemples de la question **10** suffisent ou s'il faut faire une récurrence sur le nombre de cartes.
12. 2 points, 1 pour l'espérance, 1 pour la variance, il faut bien sûr citer la linéarité de l'espérance et l'indépendance des Δ_i pour le calcul de la variance.

13. a. 1 point, classique.
b. (i) 1 point.
(ii) 1 point.
c. 1 point, 0,5 pour la position de γ .
14. a. 1,5 point, 0,5 pour l'équivalence, 1 pour le développement limité.
b. 2 points, 1 pour la convergence de $\frac{V(T)}{N^2}$, 1 pour l'inégalité.
15. a. 2 points, 1 pour chaque partie de la question, attention à ne pas confondre des événements et leurs probabilités.
b. 2 points, 1 pour la première partie de la question et l'utilisation de Bienaymé-Tchebichev, 1 pour la limite par le théorème d'encadrement.
16. 1 point, il suffit de choisir le bon c .
17. a. 2 points, 1 pour l'explication en français, 1 pour le calcul explicite de la probabilité conditionnelle.
b. 0,5, petite manipulation algébrique.
c. 1,5 point, formule des probas totales et réutilisation des majorations précédentes.
18. a. 1 point,
b. 2 points, attention à la valeur absolue ! Il ne suffit pas de faire comme si elle n'y était pas.
19. 2 points, il suffit de montrer que $\mathbb{P}([T > n])$ tend vers 0 et d'utiliser les gendarmes.
20. 0,5 point, question de cours très simple.
21. 1 point, c'est l'explication habituelle (temps de premier succès ...).
22. 1 point, les deux sont des sommes de géométriques indépendantes.
23. a. 0,5 point.
b. 1 point.
c. (i) 0,5 point, très classique.
(ii) 1,5 point, 0,5 pour la première partie, le mieux est de faire une récurrence sur N mais à ce stade du sujet, citer la question précédente suffisait. Puis 1 point pour le calcul de la somme (pas grand chose à faire).
24. a. 1 point, ne surtout pas rater ça !
b. 1 point, c'est une application directe.
25. a. 1 point, question facile à condition d'avoir tout le sujet en tête.
b. 1 point, il suffit de prendre c tel que $e^{-c} = 0.2$.

Total : 55 points, multipliés par 2/3.

COMMENTAIRES GÉNÉRAUX / ERREURS FRÉQUENTES

CORRECTION DÉTAILLÉE

Le sujet est tiré de l'ESSEC épreuve II 2011. Seule la première partie de simulation a été ajoutée. En voici une correction.

1. a.

```

1 def simul_position(N, n):
2     position = N
3     L=[position]
4     for j in range(1, n):
5         if position == 1 :
6             position = rd.randint(1,N+1)
7         else :
8             k=rd.randint(1, N+1)
9             if k>= position :
10                 position = position -1
11             L.append(position)
12     return L

```

- b. On a environ $T_1 = 60$ (le premier moment où la dernière carte bouge), $T_2 = 100$ et $T = 245 + 1 = 246$.

2. a.

```

1 def simul_T(N):
2     position = N
3     t=0
4     while position > 1 :
5         if rd.randint(1,N+1)>position :
6             position = position -1
7         t=t+1
8     return t+1

```

Attention, c'est bien $t+1$ que la fonction doit retourner pour tenir compte de la dernière insertion après que la carte C_N soit remontée en haut du paquet.

- b. La fonction calcule une moyenne empirique sur 1000 réalisations de T . On sait que la moyenne empirique est une approximation de la moyenne théorique (c'est-à-dire l'espérance), par la loi des grands nombres. Donc la fonction fournit une valeur approchée de l'espérance de T , en fonction du nombre de cartes.
- c. Il semble que l'espérance de T pour un paquet à N carte soit comprise entre $N \ln(N)$ et $N \ln(N) + N$.